

Sous-groupes distingués de S_n ROT p 49

103: conjugaison; 104: groupes finis; 105: permuta.

108: parties génératrices d'un groupe

Th1 A_n est engendré par les 3-cycles ($n \geq 3$)

Th2 Pour $n \geq 5$, les sous-groupes distingués de S_n sont $\{Id\}$, A_n et S_n .

Preuve Th1: $A_n = \ker(\epsilon)$ où ϵ est le mor.

phisme signature $\epsilon: S_n \rightarrow \{-1; 1\}$.

ϵ étant surjectif, $|S_n/A_n| = |\{-1; 1\}| = 2$

Donc $|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$

$\rightarrow |A_2| = 2$ et $|A_3| = \frac{3!}{2} = 3$

or $(123) \in A_3$, on a donc $A_3 = \langle (123) \rangle$,
car $\epsilon(123) = 1$ d'ordre 3

$A_3 = \{Id; (123); (132)\}$

Pour $n \geq 3$, montrons que A_n est engendré par les 3-cycles. Comme A_n est engendré par les transpositions, tq $\sigma = \tau_1 \dots \tau_r$, comme $\epsilon(\sigma) = 1 = (-1)^r$, r est pair.

On montre donc que le produit de deux transpositions est engendré par des 3-cycles.

① Si $\tau_1 \tau_2 = Id$, $\tau_1 \tau_2 = (123)^3$

② Sinon $\text{supp}(\tau_1) \cap \text{supp}(\tau_2) \neq \emptyset$ alors
on a $\tau_1 = (xy)$ et $\tau_2 = (xz)$
Alors $\tau_1 \tau_2 = (xzy)$

③ Sinon, $\tau_1 = (xy)$ et $\tau_2 = (zt)$
 $\tau_1 \tau_2 = (xty)(xyz)$

Donc A_n est engendré par les 3-cycles

Th2 Soit $H \triangleleft S_n$, alors $\forall \sigma \in S_n, \forall \tau \in H$,
 $\sigma \tau \sigma^{-1} \in H$. Pour mq $H = A_n$, il
suffit de montrer que H contient un 3-cycle
et que les conjugués des 3-cycles sont eux-mêmes
exactement.

Lemme: le conjugué d'un r -cycle
est un r -cycle, $\forall \sigma \in S_n, \sigma \tau \sigma^{-1} = (\sigma(x_1) \dots \sigma(x_r))$
Réciproquement, $\tau_2 \in \tau_1$

Preuve: Soit $\tau = (x_1 \dots x_r)$ un r -cycle,
soit $\sigma \in S_n$ tq $\sigma \tau \sigma^{-1}$ est un r -cycle.
On cherche $\tilde{\tau}$, r -cycle, tq $\sigma \tau = \tilde{\tau} \sigma$

Analyse: On pose $\tilde{\gamma} = (y_1; \dots; y_r)$

$$\forall k \in [1; r], (\sigma \circ \gamma)(x_k) = \sigma(x_{k+1})$$

$$\text{et } (\tilde{\gamma} \circ \sigma)(x_k) = \tilde{\gamma}(\sigma(x_k)) = \sigma(x_{k+1})$$

Synthèse: On pose $\tilde{\gamma} = (\sigma(x_1); \dots; \sigma(x_r))$

$$\text{Pq } \sigma \circ \gamma = \tilde{\gamma} \circ \sigma$$

$$\forall x \in \{x_1; \dots; x_r\} \text{ on a } (\sigma \circ \gamma)(x) = (\tilde{\gamma} \circ \sigma)(x)$$

$$\forall x \in E \setminus \{x_1; \dots; x_r\}, (\sigma \circ \gamma)(x) = \sigma(x)$$

$$\text{et comme } x \notin \{x_i\}, \sigma(x) \notin \text{supp}(\tilde{\gamma})$$

$$\text{Donc } (\tilde{\gamma} \circ \sigma)(x) = \tilde{\gamma}(\sigma(x)) = \sigma(x)$$

Conclusion: $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est un r -cycle.

Réciproquement soient γ_1 et γ_2 deux r -cycles.

Pq ils sont conjugués dans S_n ($\exists \sigma \in S_n$ tq $\sigma \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma$)

Analyse: Soit $\varphi: E \setminus \{x_1; \dots; x_r\} \rightarrow E \setminus \{y_1; \dots; y_r\}$ une

bijection. $\varphi(x) \notin \text{supp}(\gamma_2)$ donc $\gamma_2(\varphi(x)) = \varphi(x)$

$$\text{et } (\sigma \circ \gamma_1)(x) = \sigma(x). \text{ On pose alors } \sigma(x) = \varphi(x)$$

sur $E \setminus \{x_1; \dots; x_r\}$.

$$\text{D'autre part } \forall k \in [1; r], (\sigma \circ \gamma_1)(x_k) = \sigma(x_{k+1})$$

$$\text{et } \gamma_2(\sigma(x_k)) = \sigma(\gamma_1(x_k)) = \sigma(x_{k+1})$$

$$\text{On pose alors } \sigma(x_k) = y_k \quad \forall k \in [1; r].$$

Synthèse: ça marche.

Suite de la preuve: sq γ , un 3-cycle est

dans H . Alors $\forall \gamma \in S_n$, 3-cycle, $\exists \sigma \in S_n$

$$\text{tq } \sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = \tilde{\gamma} \in H \text{ donc } \{3\text{-cycles}\} \subset H$$

Donc $A_n \subset H$.

$$\text{Or } |H| \mid |S_n| \quad (\text{Lagrange}) \text{ donc } |H| \mid n!$$

$$\text{Donc } |H| = \frac{n!}{2} \text{ ou } n! \text{ donc } H = A_n \text{ ou } S_n$$

Pq si $H \neq \{Id\}$, $\exists \gamma$ 3-cycle tq $\gamma \in H$.

Pour toute transposition $\tau \in S_n$, $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \in H$.

$$\text{Donc } \tilde{\tau} = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \in H.$$

$$\rightarrow \text{Pq } \exists \tau \text{ tq } \tilde{\tau} \neq id \text{ ie tq } \tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$$

$$\text{Soit } x \in E \text{ tq } \sigma(x) \neq x. \quad y = \sigma(x)$$

$$\text{Soit } z \in E \setminus \{x; y\}, \sigma \circ (yz)(x) = \sigma(x) = y$$

$$(yz) \circ \sigma(x) = z$$

(yz) convient.

$$\rightarrow \text{Soit } \tau \text{ tq } \tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau \text{ mq } \tilde{\tau} \text{ est un 3-cycle}$$

$$\tilde{\tau} = (xy) \circ \sigma \circ (xy) \circ \sigma^{-1}$$

$$\text{Donc } \tilde{\tau}(\sigma(x)) = \sigma(y) \text{ et}$$

$$\sigma \circ (xy) \circ \sigma^{-1}(\sigma(x)) = \sigma(y)$$

$$\sigma \circ (xy) \circ \sigma^{-1}(\sigma(y)) = \sigma(x)$$

$$\text{Soit } z \notin \sigma^{\text{An}}(\{x; y\}), \sigma \circ (xy) \circ \sigma^{-1}(z) = z$$

$$\text{donc } \sigma \circ (xy) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x) \sigma(y))$$

$$\text{Donc } \tilde{\sigma} = (xy) \circ (\sigma(x) \sigma(y))$$

$$\rightarrow \text{si } y = \sigma(x), \text{ si } x \neq \sigma(y) \quad (\tilde{\sigma} \neq \text{id})$$

$$\tilde{\sigma} = (xy)(y \sigma(y)) \text{ donc } \tilde{\sigma} \in (x y \sigma(y))$$

$$\rightarrow \text{si } x = \sigma(y) : \text{symétrique}$$

$$\rightarrow \text{si } x \neq \sigma(y) \text{ et } y \neq \sigma(x)$$

$$\rightarrow \text{si } \sigma(x) \notin \{x; y\} \text{ et } \sigma(y) \notin \{x; y\},$$

$$\text{soit } z \notin \{x; y; \sigma(x); \sigma(y)\} \quad (\text{car } n \geq 5)$$

$$\tilde{\sigma} = (xy) \sigma(x) \sigma(y) \in H$$

$$\text{donc } (z \sigma(y)) \tilde{\sigma} (z \sigma(y)) \in H$$

$$\text{On } \underbrace{(z \sigma(y))}_{\in S_n} \underbrace{(xy)}_{\in H} \underbrace{(\sigma(x) \sigma(y))}_{\in S_n} (z \sigma(y)) = (xy)(\sigma(x) z)$$

On reprend les étapes :

① A_n est engendré par les 3-cycles ($n \geq 3$)

$$\rightarrow \Pi_q \text{ ou } \varepsilon : S_n \rightarrow \{-1; 1\}, |A_n| = \frac{n!}{2}$$

$$\rightarrow \Pi_q A_3 = \{\text{id}; (123); (132)\}$$

$$\rightarrow \Pi_q T_1 T_2 \text{ engendré par 3-cycles (disjonction de cas)}$$

② les s-sous-groupes distingués de S_n sont $\{Id\}; A_n; S_n$

$\rightarrow$ on prend $H \triangleleft S_n$ distingué, non trivial

2.1 Les r-cycles sont conjugués

③ Analyse-synthèse: soit γ , mq soit $\sigma \in S_n$
 $\text{mq } \exists \tilde{\gamma} \text{ r-cycle tq } \sigma \circ \tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$

④ On construit σ avec bijection $\sigma(x_k) = y_k$

2.2 H contient un 3-cycle, soit $\sigma \in H \setminus \{Id\}$

$\rightarrow$ on cherche transposition τ tq

$$\tilde{\sigma} = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \neq \text{id}$$

$\rightarrow$ en sachant que $\tilde{\sigma} \neq \text{id}$, on montre

que on a un 3-cycle dans H :

$$\rightarrow \text{mq } \tilde{\sigma} = (x y) \circ (\sigma(x) \sigma(y))$$

$$\rightarrow \text{si } y = \sigma(x); \tilde{\sigma} = (x y \sigma(y))$$

$$\text{soit, alors } \tilde{\sigma}(x y)(x y)(\sigma(x) z) = (\sigma(x) z \sigma(y)) \in H.$$

③ On conclut avec Lagrange: $A_n \subset H$ et $|H| = \frac{n!}{2}$